

Bem: Satz 9.2 + 9.3 ergeben sofort

Stetigkeit von z.B.

$$x \mapsto \cos^3(x^2 + \sin x) + \sqrt{4 + e^x}$$

an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$. Der Stetigkeitsnachweis mit Def. 9.1 wäre sehr aufwendig!



Stetigkeit der Umkehrfunktion? zunächst
reelle Sit

Satz 9.4 $\rightarrow p. a-c$ $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

und streng monoton. Dann ist

$J := f([a, b]) = \text{Bild}(f)$ ein

Intervall mit den Grenzen $f(a), f(b)$

und $f^{-1}: J \rightarrow [a, b]$ ist stetig.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

a.

reeller Fall :

(Vor) :

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Satz 9.4 :

f streng monoton $\implies J := f([a, b])$
ist ein kompaktes Intervall mit den
Grenzen $f(a), f(b)$ und

$f^{-1} : J \rightarrow [a, b]$ ist stetig



(Skript, p.131)

Satz 9.5 : ZWS

Es gilt obige Aussage über $J = f([a, b])$.

Beweis von 9.5 : vgl. Satz 8.1 
(benutze Folgenkriterium !)

b

↓

Beobachtung :
(mit ZWS!)

$$f \text{ injektiv} \Rightarrow f \text{ streng monoton}$$

Man kann also Satz 9.4 auch so formulieren:

Satz (reeller Fall)

$$\begin{aligned} & f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und } \underline{\text{injektiv}} \\ \Rightarrow & f^{-1}: \underbrace{f([a, b])}_{\text{Kompaktes Intervall}} \rightarrow [a, b] \text{ stetig} \end{aligned}$$

Der „ZWS“ klärt also den reellen Fall.

Bem: 1.) Satz 9.4 $\Rightarrow$ $\arcsin, \dots, \arcsinh, \dots$ stetig auf ihrem Definitionsbereich

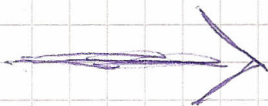
2.) analoge Aussagen für „andere Intervalle“

3.) noch eine Anwendung des ZWS

c

→ Fixpunkte

p. 305



Zum Beweis brauchen wir den

Satz 9.5: (ZWS)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\implies$
jede Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$
kommt als Funktionswert vor

Beweis von 9.5: ugl. Satz 8.1

(Lipschitz Fall); benutzt wurde dort

nur

$$x_n \rightarrow x \implies f(x_n) \rightarrow f(x),$$

also Stetigkeit!



Beweis von 9.4: o. E.

$$f \text{ streng } \boxed{\text{wachsend}} \Rightarrow f(a) < f(b).$$

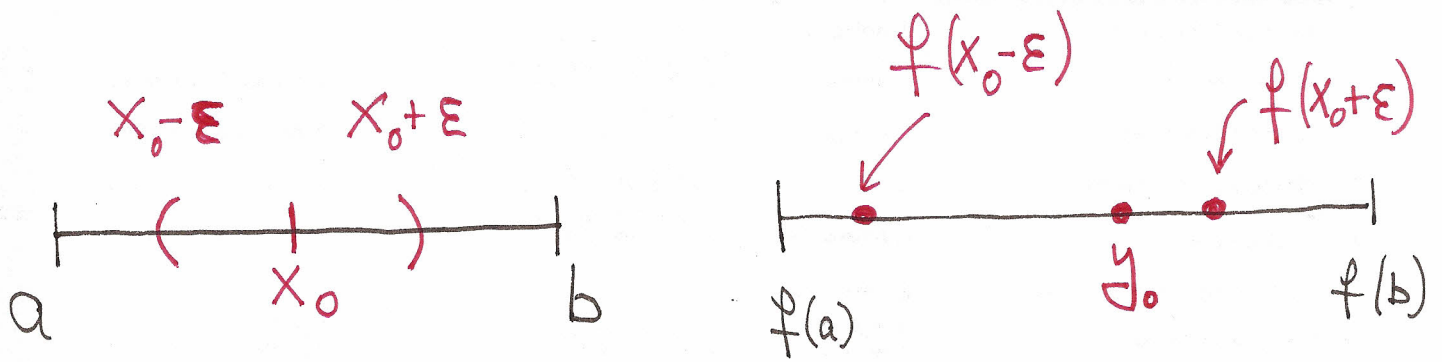
$$\text{ZWS} \Rightarrow J = [f(a), f(b)].$$

Wähle $y_0 \in J$. Z.z.: f^{-1} stetig in y_0 .

Dazu sei y_0 kein Randpunkt, also
 $y_0 \in (f(a), f(b))$ — sonst betrachte
 gleich "einseitige Intervalle". Sei $x_0 = f^{-1}(y_0)$
 $\in (a, b)$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, o. E. so klein, dass

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$$



Strenge Monotonie $\Rightarrow$

$$y_0 = f(x_0) \in (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)) \subset \mathbb{I}$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon))$$

Für $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ folgt:

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta) <$$

↑
Monotonie von f^{-1}

$$f^{-1}(f(x_0 + \epsilon)) = x_0 + \epsilon = f^{-1}(y_0) + \epsilon$$

und genauso

$$f^{-1}(y) > \dots > f^{-1}(y_0) - \varepsilon$$

Zusammen: $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

für alle y mit $|y - y_0| < \delta$. $\square$

Bem: 1.) mit dem ZWS kann man zeigen:

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und } \boxed{\text{injektiv}}$$

$$\Rightarrow f \text{ streng monoton}$$

In Satz 9.4 kann man also formal
"streng monoton" durch "injektiv" ersetzen.

2.) Satz 9.4 $\Rightarrow \arcsin \dots$,

ar sink stetig auf ihrem Def. Bereich

3.) Folgerung aus dem ZWS:

(Existenz von Fixpunkten)

Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$\varphi([a, b]) \subset [a, b]$$

Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit

$$\varphi(x) = x \quad (\text{Fixpunkt})$$

Beweis: Sei $g(x) := \varphi(x) - x$

$\Rightarrow g$ stetig mit

$$\begin{cases} g(a) = \varphi(a) - a \geq a - a = 0 \\ g(b) = \varphi(b) - b \leq b - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ZWS} &\Rightarrow [g(b), g(a)] \\ &= g([a, b]) \end{aligned}$$

Wegen $0 \in [g(b), g(a)]$ folgt:

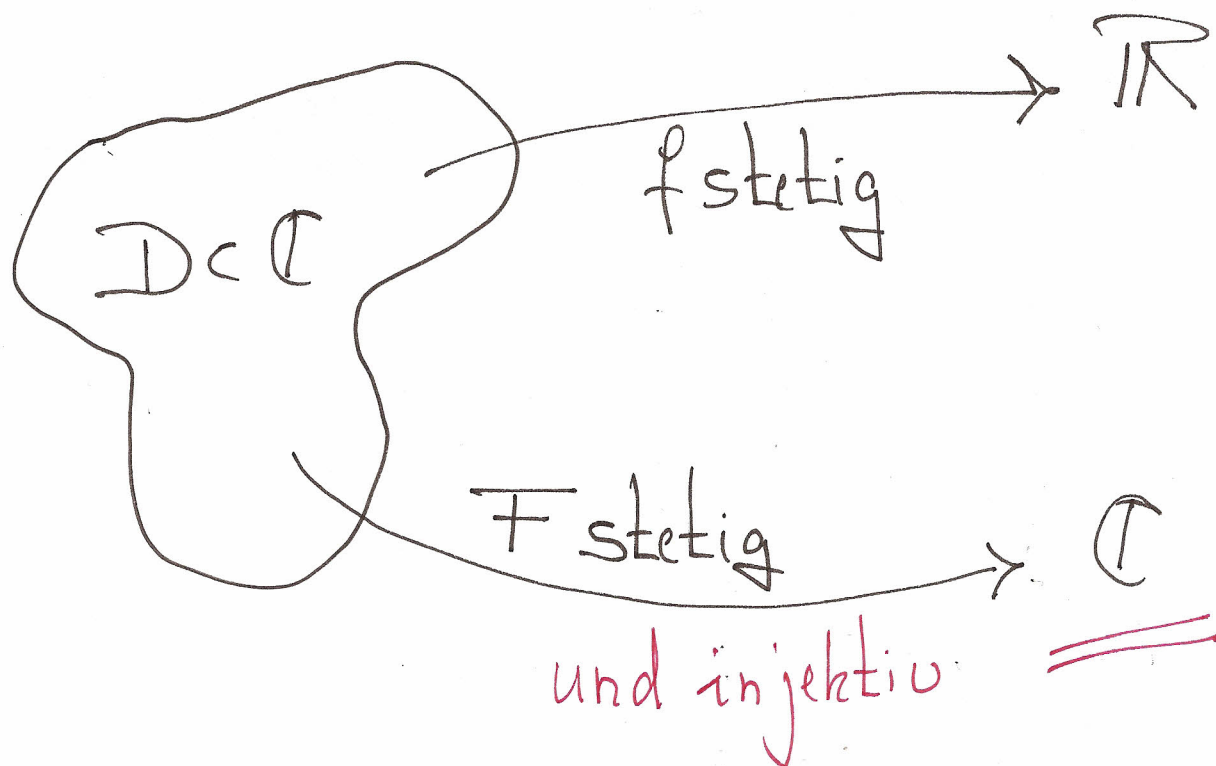
$$\exists x \in [a, b] : g(x) = 0$$

□

Wie sieht es mit der Stetigkeit von f ⁻¹
im Komplexen Fall aus, also für
 $f: K \rightarrow \mathbb{C}, \quad \underline{K \subset \mathbb{C}} \quad ?$

Eine positive Antwort hängt entscheidend von der Struktur der Menge K ab!

Diese Struktur geht auch ein, wenn



Frage: Bedingung an D , damit gilt:

① $\exists x_0 \in D: f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$
 „Maximum“

② $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ stetig —

$f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \quad \nexists x_0$

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{2 - \sin x} \quad \exists x_0$

man wissen will, ob eine stetige

Funktion $g: K \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$, $K \subset \mathbb{C}$,

auf K Maximum und Minimum hat.

Def. 9.2 : $K \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt kompakt

: $\iff$ jede Folge (x_n) in K hat

eine konvergente Teilfolge mit

! Limes in K !

"kompakte Intervalle"

Bsple : 1.) $[a, b]$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$

sind kompakt nach Bolzano - W.
(vgl. Satz 9.6 !)

2.) $(0, 1)$ ist nicht kompakt :

$$(0, 1) \ni \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin (0, 1)$$

Beobachtung: ∇ K kompakt $\Rightarrow K$ beschränkt ∇

falls nicht, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein

$$x := x_n \in K, |x_n| > n;$$

(x_n) kann keine konvergente Teilfolge haben, Wspr!

Satz 9.6 : (Kriterium für Kompaktheit)

Seien $f_1, \dots, f_m : \mathbb{C} \text{ (oder } \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
stetig. Dann ist

$$K := \{z : f_1(z) \leq 0, \dots, f_m(z) \leq 0\}$$

kompakt, vorausgesetzt K ist
beschränkt.

Beispiele: 1.) Rechteck $K := [a, b] \times [\alpha, \beta]$
 ist kompakt

- K beschränkt ✓

- seien

$$\varphi_1(z) := a - \operatorname{Re} z, \quad \varphi_2(z) := \operatorname{Re} z - b,$$

$$\varphi_3(z) := \alpha - \operatorname{Im} z, \quad \varphi_4(z) := \operatorname{Im} z - \beta$$

$$\Rightarrow K = \{z : \varphi_i(z) \leq 0, i=1, \dots, 4\}$$

2.) $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ ist kompakt:

- K beschränkt ✓

- setze $\varphi(z) := |z| - r$

Beweis von Satz 9.6 : Sei $\{z_k\}$ Folge in K .

K beschränkt $\xRightarrow[\text{W.}]{\text{Bolzano}}$ $\exists$ konvergente

Teilfolge $\{\tilde{z}_k\}$ mit Limes $\tilde{z}$

Z.z.: $z \in K$

Stetigkeit der $f_i \implies$

$$0 \geq f_i(\tilde{z}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_i(z), i=1, \dots, m,$$

also $f_i(z) \leq 0, i=1, \dots, m.$



Satz 9.7: (Rechenregeln für kompakte Mengen)

Endliche Vereinigungen und

beliebige Durchschnitte kompakter

Mengen sind kompakt.

Achtung:

$$K_n := \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right], n \geq 2,$$

kompakt, aber $\bigcup_{n=2}^{\infty} K_n = (0,1)$ nicht ∇

Beweis von 9.7: einfache Übung! -311-

□

Wir beantworten jetzt u.a. die Frage nach der Existenz von Max./Min.

Satz 9.8: Sei K kompakt ($\subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

a) Dann ist $f(K)$ kompakt.

b) Ist f reellwertig, so nimmt f auf K Maximum und Minimum an,

d.h. $\exists x_1, x_2 \in K$ mit

$$f(x_1) = \sup_K f := \sup \{ f(x) : x \in K \},$$

$$f(x_2) = \inf_K f := \inf \{ f(x) : x \in K \}.$$

(Satz v. Maximum)

Beweis: a) Sei (y_k) Folge in $f(K)$, $y_k = f(x_k)$ mit $x_k \in K \xrightarrow[\text{Kompakt}]{K} \exists$ Teilfolge

$(\tilde{x}_k)$ und $x \in K$ mit $\tilde{x}_k \rightarrow x$;

f stetig $\implies \tilde{y}_k := f(\tilde{x}_k) \rightarrow f(x)$.

Also hat (y_k) eine in $f(K)$ konvergente

Teilfolge. [merke: stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt]

b) nach a) ist $f(K)$ kompakt $\implies$

$f(K)$ beschränkt $\implies \sup_K f, \inf_K f$

existieren in $\mathbb{R}$; per Def. existiert

eine Folge (y_n) , $y_n = f(x_n)$, $x_n \in K$,

mit $y_n \rightarrow \sup_K f$;

wegen Kompaktheit von $f(K)$ liegt der

Grenzwert von $(f(x_n))$ in $f(K)$,

d.h. $\exists x_1 \in K$ mit $f(x_1) = \sup_K f$.

analog für „inf“.



Nun zur $\left[\begin{array}{l} \text{deckt den Fall} \\ \text{„} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig \& injektiv} \text{“} \\ \text{ab } \nabla \end{array} \right]$

Satz 9.9 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei $K \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ kompakt,

$f: K \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und

injektiv. Dann ist

$$f^{-1}: f(K) \rightarrow K$$

stetig.

Beweis mit Folgenkriterium: Sei $w \in f(K)$

und (w_n) Folge in $f(K)$ mit $w_n \rightarrow w$.

Zz: $f^{-1}(w_n) \rightarrow f^{-1}(w)$

Schreibe $w_n = f(z_n)$, $z_n \in K$.

K kompakt $\implies \exists$ Teilfolge (z_n^l) und

$z \in K$ mit $z_n^l \rightarrow z$;

offenbar: (f stetig)

$$w_n^l := f(z_n^l) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z);$$

wegen $w_n^l \rightarrow w$ folgt:

$$w = f(z)$$

Man bekommt:

$$f^{-1}(w_n^l) = z_n^l \rightarrow z = f^{-1}(w)$$

Also konvergiert eine Teilfolge
von $f^{-1}(w_n)$ gegen $f^{-1}(w)$

①

Man überlege sich:

-315-

②

Jede konvergente Teilfolge von $f^{-1}(w_n)$ hat $f^{-1}(w)$ als Limes.

(analoges Argument wie in ① ∇)

Nun zeige: ① + ② ergeben

③

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(w_n) = f^{-1}(w)$$

Falls nicht: $\exists \varepsilon > 0$ und eine Teilfolge

$$(f^{-1}(w_n^*)) \text{ mit } |f^{-1}(w_n^*) - f^{-1}(w)| \geq \varepsilon.$$

(Argument aus ①)

$f^{-1}(w_n^*)$ hat seinerseits eine konvergente Teilfolge, deren Limes nach ② $f^{-1}(w)$

sein muss, Wspr ∇